Université Mohammed V
Faculté des Sciences

Année universitaire 2016- 2017
Durée : 2H

Examen de Mécanique Quantique Avancée
MASTER de Physique

I- Considérons un système physique de moment cinétique $\vec{J}=\vec{J}_1+\vec{J}_2$, $\vec{J}_1$ $(j_1=2)$ et $\vec{J}_2$ $(j_2=2)$. Les états propres $|j,M\rangle$ communs à J^2 et J_z peuvent être développés suivant les états propres $|j_1,j_2;m_1,m_2\rangle$ de J_1^2, J_{1z}, J_2^2 et J_{2z} sous la forme : $|j,M\rangle=\sum_{m_1m_2}C_{m_1,m_2}|j_1,j_2;m_1,m_2\rangle$.

Supposons que le système est décrit par l'hamiltonien $H=\omega(J_{1z}+J_{2z})$, et que le vecteur d'état du système à l'instant t=0 est $|\psi(0)\rangle=\frac{1}{2}\left[|4,4\rangle+|4,3\rangle+|3,3\rangle+|4,-4\rangle\right]$.

1) Quelles sont les valeurs que peut prendre j ?
2) Calculer les coefficients de Clebsch-Gordan relatifs aux états $|4,4\rangle$, $|4,3\rangle$ et $|3,3\rangle$.
3) Calculer les valeurs moyennes $<J_{1z}>_0$ et $<J_{2z}>_0$ à l'instant t=0. En déduire l'énergie moyenne $<H>_0$ du système à cet instant.
4) Calculer l'état $|\psi(t)\rangle$ du système à l'instant t.
5) En déduire la valeur moyenne $<\vec{J}^2>_t$ de $\vec{J}^2$ à l'instant t.

II- L'hamiltonien non perturbé de l'électron de l'atome d'hydrogène s'écrit : $H_0=\frac{P^2}{2m}-\frac{e^2}{r}$,

On désigne par $|\psi_{nJ,m}\rangle$ les états propres H_0 associés aux valeurs propres E_n.

On ajoute à l'hamiltonien H_0 la perturbation V(r) définie par : $V(r)=-\frac{\lambda}{r^2}$; $(\lambda \prec\prec 1)$ est une constante réelle positive.

1- Calculer au premier ordre de la perturbation, les corrections à l'énergie et à l'état du niveau fondamental de l'atome d'hydrogène.
2-Calculer la correction à l'ordre 2 de l'énergie de l'état fondamental.
3-Calculer la correction à l'ordre 1 de l'énergie du premier niveau excité (n=2) de l'atome d'hydrogène. En déduire l'état correspondant à l'ordre zéro.

III- L'hamiltonien d'un oscillateur harmonique à trois dimensions est donné par :

$$H_0=(P_x^2+P_z^2)/2m+m\omega^2(X^2+Z^2)/2$$

On désigne, respectivement, par $|\phi_{n_x,n_z}\rangle$ et $E_n^{(0)}=(n+1)\hbar\omega$; $(n=n_x+n_z)$ les vecteurs propres et les valeurs propres de H_0. On ajoute à cet hamiltonien la perturbation $W(t)=\lambda\hbar\omega_0\hat{X}\hat{Z}\cos(\omega_0 t)$; $\lambda<<1$, est une constante positive, sans dimension

1- Calculer les éléments de matrices : $\langle\phi_{n'_x,n'_z}|XZ|\phi_{n_x,n_z}\rangle$

2- En déduire, à l'ordre 1 en λ, la probabilité $P_{if}(t)$ pour que l'oscillateur passe de l'état $|\phi_{2,1}\rangle$ à t=0 , à l'éta $|\phi_{1,2}\rangle$ à l'instant t

<u>On donne :</u> $X=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\hat{X}$; $\hat{X}=\frac{1}{\sqrt{2}}(a_x^\dagger+a_x)$; $a_x^\dagger|\varphi_{n_x}\rangle=\sqrt{n_x+1}|\varphi_{n_x+1}\rangle$; $a_x|\varphi_{n_x}\rangle=\sqrt{n_x}|\varphi_{n_x-1}\rangle$.

